EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

1X-1JUNI 1965

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

REDACTIE.
Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel.070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807

VASTE MEDEWERKERS.
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;
Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. H. TURKSTRA, Hilversum
Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

INLEIDING TOT DE THEORIE DER DISTRIBUTIES I

door

Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN [1])

Groningen

1. *Functies van een reële variabele.*

Gelijk bekend verstaan we onder een *functie* over de verzameling R der reële getallen een voorschrift f, waarmee bij ieder getal $x \in R$ een complex getal $f(x) \in C$ wordt verkregen. Een functie is dus niets anders dan een afbeelding van de verzameling R in de verzameling C. Men duidt dit symbolisch aan met

(1–1) $$f : x \to f(x) \in C, \qquad x \in R.$$

Het bij x behorende getal $f(x)$ heet de *waarde* van de functie voor het getal x. Heeft een functie geen andere dan reële waarden, dan heet de functie *reëel.*

Twee functies f en g heten *gelijk*, $f = g$, indien voor iedere x geldt $f(x) = g(x)$. Is in het bijzonder $f(x) = 0$ voor iedere x, dan zegt men dat de functie *gelijk is aan nul* en men schrijft $f = 0$, symbolisch:

(1–2) $$f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \qquad x \in R.$$

Zijn f en g gegeven functies, dan wordt de *som* $f + g$, resp. het *produkt* fg, gedefinieerd als de functie, welke gekarakteriseerd is door de afbeelding

(1–3) $$f + g : x \to f(x) + g(x),$$

resp.

(1–4) $$fg : x \to f(x)g(x).$$

Hierin is als bijzonder geval opgesloten het produkt van de functie g en een constante c; onder deze laatste wordt verstaan de functie

(1–5) $$c : x \to c.$$

[1]) Prof. Gerretsen heeft zich de moeite getroost de inhoud van de voordracht, die hij op 24 augustus 1964 te Amsterdam heeft gehouden voor de vakantiecursus van het Mathematisch Centrum, uitvoerig op schrift te stellen. De lezer is daardoor in staat zich een beeld te vormen van de betekenis van de tegenwoordig zo belangrijke functionalen. Hij zal zich wel enige inspanning moeten getroosten, doch deze wordt ruimschoots beloond. (Red.)

Blijkbaar zijn de functies f en g dan en slechts dan aan elkaar gelijk als $f - g$ gelijk is aan 0.

We merken op, dat een complexe functie steeds is te beschouwen als een lineaire combinatie van twee reële functies, want men kan het complexe getal $f(x)$ schrijven als een som $f_1(x) + if_2(x)$, zodat $f = f_1 + if_2$ in de zin van de boven geformuleerde definities.

2. *Lineaire functionalen.*

Zij Φ een verzameling van reële functies φ van een reële variabele x. Als we de variabele x uitdrukkelijk willen vermelden schrijven we ook $\varphi(x)$ voor φ, zonder daarmee steeds de waarde van φ voor x te willen aangeven. Uit het verband moet blijken welke betekenis wordt bedoeld.

We zullen veronderstellen dat Φ een reële lineaire vectorruimte is. Daarmee is het volgende bedoeld:

Met $\varphi_1 \in \Phi$ en $\varphi_2 \in \Phi$ is ook $\varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi$. Is a een reëel getal, dan is met $\varphi \in \Phi$ ook $a\varphi \in \Phi$.

Onder een *lineaire afbeelding* van Φ in de verzameling der complexe getallen verstaan we een voorschrift f, dat aan iedere functie $\varphi \in \Phi$ een getal $\langle f, \varphi \rangle \in C$ toevoegt, symbolisch

(2–1) $$f : \varphi \to \langle f, \varphi \rangle \in C, \qquad \varphi \in \Phi,$$

zodanig dat

(2–2) $$\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \rangle = a_1\langle f, \varphi_1 \rangle + a_2\langle f, \varphi_2 \rangle, \; a_1, a_2 \in R.$$

Een dergelijke lineaire afbeelding zullen we doorgaans een *lineaire functionaal*, kortweg *functionaal*, noemen. Soms is het nuttig een functionaal f met het symbool $f(x)$ aan te duiden. Daarmee is niet gezegd dat f een functie is van x, want een functionaal beeldt immers geen getallen af, maar functies. Het symbool x duidt echter aan, dat f opereert op functies van de variabele x. Met $f(t)$ zou men bijvoorbeeld een functionaal over functies $\varphi(t)$ kunnen aangeven. Inderdaad kan een functionaal een waarde aannemen, nl. voor een gegeven functie. Die waarde wordt dan door $\langle f, \varphi \rangle$ voorgesteld. De ,,waarde'' van een functionaal voor een getal x is een zinloos begrip.

Zijn f en g functionalen over Φ dan definiëren we de *som* $f + g$ door het voorschrift

(2–3) $$f + g : \varphi \to \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle,$$

en als a een *getal* voorstelt het *produkt* van a en f door

(2–4) $$af : \varphi \to a\langle f, \varphi \rangle.$$

De definitie van het produkt van functionalen stuit op grote moeilijkheden. Een analogon van de definitie van het produkt van functies verstoort de lineariteit. We zullen daarom er van afzien een algemene definitie van het produkt van functionalen op te stellen.

Op grond van (2–3) en (2–4) blijken de lineaire functionalen ook weer een vectorruimte te vormen, de *duale ruimte* Φ^* van Φ. De nulvector is de functionaal nul, waarvoor geldt $\langle f, \varphi \rangle = 0$ voor alle $\varphi \in \Phi$. Voorts worden f en g dan en slechts dan als aan elkaar gelijk beschouwd, als $f - g$ gelijk is aan nul.

Een functionaal wordt *reëel* genoemd, als $\langle f, \varphi \rangle$ reëel is voor iedere $\varphi \in \Phi$. Daar in (2–4) a ook complex mag zijn, kunnen we iedere functionaal schrijven als een combinatie $f_1 + if_2$ van reële functionalen.

3. *Finiete toetsfuncties.*

De lineaire functionalen over een functieruimte zijn te algemene objecten om voor de analyse van enig belang te zijn. Men zal daarom aan Φ bepaalde beperkingen van analytische aard moeten opleggen, die worden bepaald door het doel, waarvoor men de functionalen wil gebruiken. Uiteraard zullen deze beperkingen een analytisch karakter moeten hebben. Van te voren is moeilijk te zeggen in welke richting men die beperkingen moet zoeken. Een zeer gelukkige suggestie is gedaan door de Franse wiskundige L. Schwartz, die tussen de jaren 1944 en 1949 de theorie der lineaire functionalen uitvoerig heeft ontwikkeld. Hij heeft voorgesteld voor de ruimte Φ te nemen de verzameling van alle functies φ, die aan de volgende eisen voldoen:

1) De functies φ zijn in ieder punt x willekeurig vaak differentieerbaar.
2) De functies φ zijn *finiet*, d.w.z. bij iedere functie φ is een open interval aan te geven waarbuiten de functie geen andere waarden dan nul aanneemt.

Men kan zeer wel goede theorieën opbouwen, wanneer aan de functies φ minder rigoureuze eisen worden gesteld. Maar met de boven gemaakte onderstellingen worden talrijke moeilijkheden van analytische aard omzeild, terwijl de theorie toch een zeer algemeen karakter blijft behouden.

We zullen voortaan de functies van de ruimte Φ, welke aan de eisen 1) en 2) voldoet, *toetsfuncties* noemen. We merken op, dat de constanten niet tot Φ behoren. Wel is een constante willekeurig vaak differentieerbaar, maar niet finiet, tenzij de constante nul is. Deze speciale constante behoort uiteraard tot Φ, want Φ is immers een vectorruimte.

Voorbeelden van toetsfuncties zijn gemakkelijk te geven. Vooreerst merken we op, dat als $\alpha(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is, maar niet noodzakelijk finiet, dan is met φ ook $\alpha\varphi$ een toetsfunctie.

De functie

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{1}{x^2-1}, & |x| < 1, \\ 0 & , |x| \geqq 1, \end{cases} \tag{3-1}$$

is in ieder punt willekeurig vaak differentieerbaar. Voor $x = \pm 1$ zijn ook alle afgeleiden gelijk aan nul.

Door een lineaire transformatie van de variabele x kunnen we het interval $|x| < 1$ in ieder ander interval overvoeren. Zo is

$$\varphi(x) = \eta \left(\frac{x - \frac{1}{2}(a+b)}{\frac{1}{2}(b-a)} \right) \tag{3-2}$$

een toetsfunctie, die buiten het interval $a < x < b$ gelijk is aan nul. De afsluiting van de verzameling der punten x waarvoor $\varphi(x) \neq 0$ heet de *drager* van φ. De drager van η is dus het interval $|x| \leqq 1$.

Een interessante toetsfunctie wordt uit $\eta(x)$ afgeleid, doordat we x vervangen door x/ε, waarbij ε een positief getal is kleiner dan $\frac{1}{2}(b-a)$. De functie

$$\rho_\varepsilon(x) = k \int_a^b \eta \left(\frac{x-u}{\varepsilon} \right) du \tag{3-3}$$

met $1/k = \rho_\varepsilon(\frac{1}{2}(a+b))$, is gelijk aan 1 voor $a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon$ en gelijk aan 0 voor $x \leqq a - \varepsilon$ of $x \geqq b + \varepsilon$. Ook deze functie is willekeurig vaak differentieerbaar en dus een toetsfunctie.

4. *Een hulpstelling.*

De volgende hulpstelling wordt nogal eens gebruikt:

Laat $h(x)$ een functie zijn, die in een omgeving van $x = 0$ willekeurig vaak differentieerbaar is. Is voorts $h(0) = 0$, dan bezit

$$g(x) = \frac{h(x)}{x} \tag{4-1}$$

in $x = 0$ een ophefbare discontinuïteit en is eveneens willekeurig vaak differentieerbaar in een omgeving van $x = 0$.

Wegens $h(0) = 0$ is

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0).$$

Als we $g(0) = h'(0)$ nemen is $g(x)$ in $x = 0$ continu.

De relatie (4–1) is voor $x \neq 0$ gelijkwaardig met

$$xg(x) = h(x). \tag{4–2}$$

Beperken we nu x tot een passende omgeving van $x = 0$, dan levert successieve differentiatie in ieder punt $x \neq 0$, waar $g(x)$ stellig differentieerbaar is:

$$\begin{aligned} g(x) + xg'(x) &= h'(x), \\ 2g'(x) + xg''(x) &= h''(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ ng^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x) &= h^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Eliminatie van $g, g', \ldots, g^{(n-1)}$ uit deze betrekkingen en (4–2) voert tot

$$\frac{(-1)^n}{n!} g^{(n)}(x) = \Big(h(x) - xh'(x) + \frac{1}{2!} x^2 h''(x) - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n h^{(n)}(x)\Big) / x^{n+1}.$$

Teller en noemer in het rechterlid hebben beide de limiet 0 voor $x \to 0$. Door differentiatie van de teller vallen de verkregen termen twee aan twee tegen elkaar weg en er blijft

$$\frac{(-1)^n}{n!} x^n h^{(n+1)}(x),$$

terwijl de afgeleide van de noemer is $(n + 1)x^n$. Volgens de regel van De l'Hôpital hebben we dan

$$\lim_{x \to 0} g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} h^{(n+1)}(0).$$

Gelijk bekend mag men uit het bestaan van de grenswaarden van de afgeleiden voor $x \to 0$ tot het bestaan van de afgeleiden in $x = 0$ besluiten. Daarmee is het bewijs van de hulpstelling voltooid.

5. *Reguliere functionalen.*

Hoewel er een principieel onderscheid bestaat tussen functies en functionalen kunnen onder passende voorwaarden functies gebruikt worden om lineaire functionalen te definiëren.

Laat $f(x)$ een *locaal integreerbare functie* zijn. Daarmee bedoelt men dat $f(x)$ absoluut integreerbaar is (b.v. in de zin van Riemann) over ieder eindig interval. Natuurlijk is met f ook $f\varphi$ locaal integreerbaar als φ overal continu is. Is in het bijzonder φ een toets-

functie, dan heeft het voorschrift

(5–1) $$\boxed{\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx}$$

betekenis, want de integraal in het rechterlid wordt slechts over een eindig interval genomen, omdat $\varphi(x)$ buiten een dergelijk interval overal gelijk is aan nul. Doordat de toetsfuncties finiet zijn, kan men vaak lastige convergentiebeschouwingen van oneigenlijke integralen uit de weg gaan en alle stellingen, die op eigenlijke integralen betrekking hebben, zonder nader onderzoek toepassen.

Uit de grondregels van de integraalrekening leidt men onmiddellijk af dat door (5–1) een lineaire functionaal wordt beschreven. Een functionaal gedefinieerd als in (5–1) met behulp van een locaal integreerbare functie heet *regulier*.

Natuurlijk zou het teleurstellend zijn, wanneer geen andere dan reguliere functionalen zouden bestaan. In het volgende nummer bespreken we echter een beroemd voorbeeld van een niet-reguliere functionaal.

6. *De functionaal van Dirac.*

Wordt aan iedere toetsfunctie op grond van het voorschrift

(6–1) $$\boxed{\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)}$$

de waarde van φ voor $x = 0$ toegevoegd, dan is daarmee een functionaal gegeven. Immers het voorschrift is lineair gelijk blijkt uit

$$\langle \delta, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle = a_1\varphi_1(0) + a_2\varphi_2(0) = a_1\langle \delta, \varphi_1\rangle + a_2\langle \delta, \varphi_2\rangle.$$

We zullen nu bewijzen, dat deze functionaal niet regulier is. Onderstel daarom dat er een locaal integreerbare functie $\delta(x)$ zou bestaan met

(6–2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

We nemen nu voor $\varphi(x)$ de functie

(6–3) $$\varphi_\varepsilon(x) = e\,\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad e = \exp 1,$$

waarbij $\eta(x)$ gegeven is in (3–1). Blijkbaar is $\varphi_\varepsilon(x)$ gelijk aan nul voor $|x| \geqq \varepsilon$. We kunnen daarom op grond van (6–2) en het feit, dat $\varphi_\varepsilon(x)$ buiten het interval $|x| < \varepsilon$ nul is schrijven

(6–4) $$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\varphi(x)\, dx = \varphi_\varepsilon(0) = 1$$

zodat

$$1 \leqq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\delta(x)| \, dx, \tag{6–5}$$

wegens $|\varphi_\varepsilon(x)| \leqq 1$. Gelijk bekend, is de integraal van een locaal integreerbare functie willekeurig klein over een voldoend klein integratie interval. Nemen we dus ε voldoend dicht bij nul, dan is het rechterlid van (6–5) kleiner dan 1 en we hebben een tegenspraak. Daarmee is bewezen:

De functionaal δ is niet regulier.

Deze functionaal wordt meestal genoemd naar de fysicus P. A. M. Dirac. Men spreekt vaak van de „functie" van Dirac, maar het is nu wel duidelijk dat deze term misleidend is. Overigens heeft Dirac deze grootheid zonder voldoende mathematische fundering ingevoerd als een z.g. oneigenlijke functie met de paradoxale eigenschappen

$$\delta(x) = 0, \; x \neq 0; \; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, dx = 1.$$

Een dergelijke functie bestaat niet. De theorie der functionalen geeft echter de basis voor een legitiem gebruik van dit symbool δ.

Het bezit een aantal interessante eigenschappen, waarvan we er dadelijk een zullen behandelen. Eerst een definitie. Is $\alpha(x)$ een willekeurig vaak differentieerbare functie en f een functionaal, dan verstaan we onder αf de functionaal gegeven door

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha\varphi \rangle. \tag{6–6}$$

Dan volgt in het bijzonder

$$\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta. \tag{6–7}$$

Immers,

$$\langle \alpha\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha\varphi \rangle = \alpha(0)\,\varphi(0) = \alpha(0)\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \alpha(0)\delta, \varphi \rangle.$$

Nemen we voor $\alpha(x)$ de functie x, dan komt er

$$x\delta(x) = 0. \tag{6–8}$$

We zien dat een produkt nul kan zijn zonder dat ten minste één der factoren nul is. We stellen ons nu de vraag welke functionalen f aan

$$xf = 0 \tag{6–9}$$

voldoen.

Om deze vergelijking op te lossen nemen we eerst een vaste toetsfunctie ξ, met $\xi(0) = 1$. We kunnen bij voorbeeld nemen

$$\xi(x) = e\,\eta(x),$$

waarbij weer η de functie (3–1) is. Op grond van de hulpstelling van no. 4 is de functie

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\xi(x)}{x} \tag{6–10}$$

overal willekeurig vaak differentieerbaar en kennelijk ook finiet. Uit (6–10) volgt

$$\varphi(x) = x\varphi_0(x) + \varphi(0)\xi(x). \tag{6–11}$$

Laat nu f een oplossing zijn van (6–9). Dan moet gelden

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi\rangle &= \langle f, x\varphi_0\rangle + \langle f, \varphi(0)\xi\rangle = \langle xf, \varphi_0\rangle + \varphi(0)\langle f, \xi\rangle \\ &= 0 + c\varphi(0) = c\langle\delta, \varphi\rangle = \langle c\delta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Daarmee is bewezen:

De oplossingen van de vergelijking $xf = 0$ zijn de functionalen $c\delta$, waarbij c een willekeurige constante voorstelt.

Een direct gevolg is: Uit $xf = xg$ volgt $f = g + c\delta$.

7. *Gelijkheid van een functionaal en een functie in een open interval.*

Een functionaal is in het algemeen een vrij onaanschouwelijk object. Gelukkig kan men in zeer vele gevallen over passende intervallen een functionaal door een gewone functie voorstellen op een nog nader te preciseren wijze.

Een functionaal f heet *in het interval $a < x < b$ gelijk aan een in dit interval absoluut integreerbare functie $g(x)$*, als voor iedere toetsfunctie φ, die buiten dit interval gelijk is aan nul geldt

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_a^b g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7–1}$$

De functionaal δ is gelijk aan nul in ieder open interval, dat $x = 0$ niet bevat, omdat voor de betreffende toetsfuncties $\varphi(0) = 0$ geldt. Het heeft echter geen zin om te zeggen dat δ gelijk is aan nul in een punt $x \neq 0$, omdat δ functies afbeeldt en geen getallen.

Het is duidelijk dat een reguliere functionaal f, voortgebracht door een locaal integreerbare functie $g(x)$, in ieder interval aan die functie gelijk is. Twee reguliere functionalen kunnen in een interval gelijk zijn zonder dat de functies overal dezelfde waarde aannemen. Immers, wanneer $f(x)$ en $g(x)$ in geïsoleerde punten van elkaar verschillen kunnen toch wel de integralen $\int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ en $\int g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ aan elkaar gelijk zijn.

We willen hier nog een opmerking maken, waarvan we later profijt kunnen trekken. Laat f een functionaal voorstellen, die gelijk is

aan nul in alle open intervallen links van $x = p$. Zij voorts $\alpha(x)$ een overal differentieerbare functie met afgeleiden van willekeurig hoge orde, die alleen voor $x \geqq q$ gelijk is aan nul. Dus α behoeft niet finiet te zijn en daarom heeft $\langle f, \alpha \rangle$ niet altijd betekenis. We vormen nu een functie $\rho_\varepsilon(x)$ als in (3–3) met $a + \varepsilon < p$, $b - \varepsilon \geqq q$. Dan is natuurlijk $\varphi = \rho_\varepsilon \alpha$ een toetsfunctie, die voor $a + \varepsilon \leqq x \leqq q$ met α overeenstemt en daarvoor heeft $\langle f, \varphi \rangle$ betekenis. De waarde hangt niet van a of van ε af. Immers alle functies $\rho_\varepsilon \alpha$ stemmen overeen in het interval $p \leqq x \leqq q$ en hun verschil kan alleen van nul verschillen in een interval links van p. Maar daar is f gelijk aan nul. Onder $\langle f, \alpha \rangle$ kunnen we dan verstaan de waarde $\langle f, \varphi \rangle$, waarbij φ als boven is geconstrueerd.

8. *Convergentie.*

In de vectorruimte Φ kan de continuïteit worden beschreven met een begrip ,,convergentie''. We duiden met $\varphi^{(k)}$ aan de k-de afgeleide van φ waarbij φ zelf wordt bedoeld als $k = 0$. Beschouw op de getallenrechte een puntverzameling, waarvan de punten met λ worden aangeduid en zij λ_0 een verdichtingspunt van die verzameling. Voorts denken we ons bij iedere λ een functie φ_λ aangewezen, zodat een collectie van toetsfuncties is verkregen.

We zullen zeggen dat het systeem φ_λ voor $\lambda \to \lambda_0$ *sterk* naar nul convergeert, als:

1) alle functies φ_λ buiten hetzelfde interval gelijk zijn aan nul.
2) Voor iedere waarde van k de functies $\varphi_\lambda^{(k)}$ uniform naar nul convergeren, d.w.z. er bestaat bij gegeven $\varepsilon > 0$ een getal r_k zodanig dat voldaan is aan

$$|\varphi_\lambda^{(k)}(x)| < \varepsilon$$

voor alle λ die aan $|\lambda - \lambda_0| < r_k$ voldoen, onafhankelijk van x.

Het geval $\lambda_0 = \infty$ sluiten we niet uit. Men moet dan de formulering van 2) dienovereenkomstig modificeren.

Het is duidelijk dat het systeem φ_λ sterk naar φ convergeert als $\varphi_\lambda - \varphi$ sterk naar nul convergeert voor $\lambda \to \lambda_0$.

Als eerste toepassing bewijzen we

Het differentiequotiënt

$$\frac{\varphi(x + \lambda) - \varphi(x)}{\lambda}, \qquad \lambda \neq 0 \tag{8–1}$$

convergeert sterk naar $\varphi'(x)$ *voor* $\lambda \to 0$.

Beschouw het systeem van functies

$$(8\text{-}2)\qquad \sigma_\lambda(x) = \frac{\varphi(x+\lambda)-\varphi(x)}{\lambda} - \varphi'(x).$$

Als we $\mu > 0$ passend kiezen is het mogelijk een interval aan te geven, waarbuiten alle functies $\varphi(x+\lambda)$ gelijk zijn aan nul, mits $|\lambda| < \mu$. We zullen nu aantonen dat bovendien de functies $\sigma_\lambda^{(k)}(x)$ voor een willekeurige waarde van $k \geqq 0$ naar nul gaan als $\lambda \to 0$ en wel uniform in x.

Welnu, voor vaste k is

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda^{(k)}(x) &= \frac{1}{\lambda}(\varphi^{(k)}(x+\lambda) - \varphi^{(k)}(x)) - \varphi^{(k+1)}(x)\\ &= \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda} (\varphi^{(k+1)}(u) - \varphi^{(k+1)}(x))\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda} (u-x)\varphi^{(k+2)}(\theta)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

waarbij θ tussen x en u. Voorts is $\varphi^{(k+2)}(x)$ uniform begrensd, m.a.w. er bestaat een constante c_k met $|\varphi^{(k+2)}(x)| < c_k$ voor alle x. Dus geldt

$$|\sigma_\lambda^{(k)}(x)| < \frac{c_k}{|\lambda|}\left|\int_x^{x+\lambda} (u-x)\,\mathrm{d}x\right| = \tfrac{1}{2}c_k|\lambda| < \varepsilon$$

voor $|\lambda| < r_k = 2\varepsilon/c_k$. Hiermee is het bewijs van de sterke convergentie voltooid.

Een lineaire functionaal f heet *continu* indien een uit een sterk naar nul convergerend systeem van toetsfuncties φ_λ een naar nul convergerend systeem van getallen $\langle f, \varphi_\lambda\rangle$ wordt verkregen voor $\lambda \to \lambda_0$.

Een reguliere functionaal is steeds continu.

Zijn nl. de functies φ_λ gelijk aan nul buiten het interval $a < x < b$ en convergeren ze sterk naar nul voor $\lambda \to \lambda_0$ dan is

$$|\langle f, \varphi_\lambda\rangle| = \left|\int_a^b f(x)\varphi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)||\varphi_\lambda(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

voor alle λ die aan $|\lambda - \lambda_0| < r$ voldoen, waarbij r passend is gekozen.

De functionaal van Dirac is continu.

Als $\varphi_\lambda(x) \to 0$ uniform in x, dan gaat stellig $\varphi_\lambda(0) \to 0$.

De continue lineaire functionalen worden in navolging van L. Schwartz *distributies* genoemd. Men noemt ze ook wel *gegenerali-*

seerde functies. De locaal integreerbare functies zijn in het systeem vertegenwoordigd als de *reguliere distributies.* De distributies vormen een lineaire vectorruimte, die een deelruimte is van de duale ruimte van Φ.

Naast de sterke convergentie van systemen van toetsfuncties kennen we ook een convergentiebegrip voor functionalen. Laat bij iedere λ uit een verzameling van getallen λ een distributie f_λ zijn gegeven. Is voorts λ_0 een verdichtingspunt van de verzameling der $\lambda (\lambda_0 = \infty$ niet uitgesloten), dan zeggen we dat f_λ voor $\lambda \to \lambda_0$ *zwak* naar de distributie f convergeert als voor iedere toetsfunctie geldt

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \langle f_\lambda, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \tag{8–3}$$

Een eenvoudig maar toch interessant voorbeeld is het volgende: Zij $h(x)$ de functie

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqq 1. \end{cases} \tag{8–4}$$

De grafiek wordt gevonden met behulp van een rechthoek met hoogte $\frac{1}{2}$ gelegen tussen de punten $x = -1$ en $x = +1$. We vormen nu de functies

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} h\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0. \tag{8–5}$$

Voor kleine λ worden ze afgebeeld als lange smalle rechthoeken met breedte 2λ en hoogte $1/2\lambda$. De functies $h_\lambda(x)$ zijn alle locaal integreerbaar en definiëren dus reguliere functionalen h_λ bepaald door

$$\langle h_\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(x)\, dx = \varphi(\theta), \tag{8–6}$$

waarbij $-\lambda < \theta < \lambda$. Voor $\lambda \to 0$ gaat $\varphi(\theta)$ naar $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$, zodat

$$\lim_{\lambda \to 0} h_\lambda = \delta. \tag{8–7}$$

Dit is een populaire manier om de distributie δ aanschouwelijk voor te stellen.

9. *De afgeleiden van een distributie.*

Een van de merkwaardigste uitkomsten van de theorie der distributies is het feit, *dat een distributie willekeurig vaak differentieerbaar is.* Natuurlijk moeten we eerst zorgvuldig nagaan op welke wijze de afgeleide wordt gedefinieerd. We doen dit in analogie met de gewone functies.

Zij f een distributie, die we nu met $f(x)$ zullen aanduiden. Met $f(x + \lambda)$ bedoelen we een distributie bepaald door

(9–1) $$\langle f(x+\lambda),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ \varphi(x-\lambda)\rangle.$$

We vormen nu de distributie

$$\frac{f(x+\lambda)-f(x)}{\lambda}$$

en beweren dat deze zwak naar een distributie convergeert voor $\lambda \to 0$. Wegens (9–1) hebben we

$$\left\langle \frac{f(x+\lambda)-f(x)}{\lambda},\ \varphi(x)\right\rangle = \left\langle f(x+\lambda)-f(x),\ \frac{\varphi(x)}{\lambda}\right\rangle$$

$$= \left\langle f(x+\lambda),\ \frac{\varphi(x)}{\lambda}\right\rangle - \left\langle f(x),\ \frac{\varphi(x)}{\lambda}\right\rangle$$

$$= \left\langle f(x),\ \frac{\varphi(x-\lambda)}{\lambda}\right\rangle - \left\langle f(x),\ \frac{\varphi(x)}{\lambda}\right\rangle$$

$$= \left\langle f(x),\ \frac{\varphi(x-\lambda)-\varphi(x)}{\lambda}\right\rangle.$$

In no. 7 hebben we bewezen, dat $\varphi(x-\lambda) - \varphi(x)/-\lambda$ voor $\lambda \to 0$ sterk naar $\varphi'(x)$ convergeert. Wegens de continuïteit van f convergeert dan

$$\left\langle \frac{f(x+\lambda)-f(x)}{\lambda},\ \varphi(x)\right\rangle$$

naar $\langle f, -\varphi'\rangle$. Hiermee is echter weer een continue functionaal gedefinieerd, dus een distributie, die we de *afgeleide* van f noemen en aanduiden met

$$f' \text{ of } \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Dus geldt

(9–2) $$\boxed{\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x+\lambda)-f(x)}{\lambda} = f'(x)}$$

met

(9–3) $$\boxed{\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle.}$$

Uit het voorschrift (9–3) blijkt, dat men het proces kan herhalen,

$$\langle f'', \varphi\rangle = (-1)^2\langle f, \varphi''\rangle, \ldots, \langle f^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n\langle f, \varphi^{(n)}\rangle,$$

kortom

Een distributie bezit afgeleiden van willekeurig hoge orde.

De overeenstemming met het begrip „afgeleide" in de klassieke analyse blijkt uit de stelling:

Is de distributie f in het interval $a < x < b$ gelijk aan de overal in dit interval differentieerbare functie $g(x)$ en is $g'(x)$ in dit interval absoluut integreerbaar, dan is de afgeleide f' van f in dit interval gelijk aan $g'(x)$.

Volgens de definitie van gelijkheid is

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi\rangle &= -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -g(x)\varphi(x)\Big|_a^b + \int_a^b g'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b g'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

en f' blijkbaar gelijk aan g'.

Men denke er wel aan dat het begrip „afgeleide" van een distributie weer een globaal begrip is. Het heeft geen zin om te zeggen dat de distributie differentieerbaar is in een bepaald punt, zoals een gewone functie.

Nu enkele voorbeelden. We beschouwen eerst de functie

(9–4) $$x_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leqq 0. \end{cases}$$

De daardoor voortgebrachte reguliere distributie geven we ook aan met x_+. Deze is bepaald door

(9–5) $$\langle x_+, \varphi\rangle = \int_0^\infty x\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

De afgeleide vinden we uit

$$-\langle x_+, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

zoals direct door partiële integratie blijkt.

De *functie van Heaviside*

(9–6) $$H(x) = \begin{cases} 1; & x > 0, \\ 0, & x \leqq 0, \end{cases}$$

brengt de reguliere distributie voort bepaald door

(9–7) $$\int_{-\infty}^\infty H(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dit in verband gebracht met het boven gevonden resultaat leidt tot

(9–8) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_+}{\mathrm{d}x} = H}$$

een resultaat, dat ook aanschouwelijk duidelijk is.

Berekenen we nu de afgeleide van H. De herleiding verloopt aldus

$$-\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

dus

De afgeleide van de distributie van Heaviside is de distributie van Dirac:

(9–9) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \delta.}$$

δ is niet gelijk aan de afgeleide van de functie van Heaviside, want deze functie is immers niet overal differentieerbaar.

De distributie van Dirac is natuurlijk ook differentieerbaar en de afgeleide wordt bepaald uit

(9–10) $$\boxed{\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).}$$

Natuurlijk kan men onbeperkt doorgaan.

Onder de *constante distributie c* verstaan we de distributie bepaald door

(9–11) $$\langle c, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(x)\,\mathrm{d}x = c\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

De afgeleide van de constante distributie is nul.

Immers,

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}, \varphi \right\rangle = -\langle c, \varphi' \rangle = -c\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -c\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

want $\varphi(x) = 0$ aan de grenzen van het integratie-interval.

Bijzonder belangwekkend is de volgende stelling:

Een distributie met afgeleide nul is de constante.

Laat $\xi(x)$ een vaste toetsfunctie zijn met $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Een derg. toetsfunctie bestaat, bijvoorbeeld de functie $\eta(x)$ beschreven in (3–1). Na eventuele vermenigvuldiging met een passende constante

kunnen we bereiken dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{9–12}$$

Is $\varphi(x)$ een toetsfunctie, dan is blijkbaar ook

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \xi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \tag{9–13}$$

een toetsfunctie, die wegens (9–12) de eigenschap

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

heeft. Daar in feite de grenzen van alle integralen eindig zijn, is ook

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x \tag{9–14}$$

een toetsfunctie, terwijl

$$\varphi_1'(x) = \varphi_0(x). \tag{9–15}$$

Laat nu f een distributie zijn met afgeleide nul. Daar φ_0 een afgeleide is, geldt

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = 0$$

en op grond van (9–13) hebben we

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi \rangle &= \langle f, \varphi_0 \rangle + \langle f, \xi \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \\ &= 0 + c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} c\,\varphi(u)\mathrm{d}u = \langle c, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

waarmee het bewijs is voltooid.

Met dezelfde hulpmiddelen kunnen we bewijzen

Een distributie f is steeds de afgeleide van een distributie g. Alle oplossingen van

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = f \tag{9–16}$$

verschillen onderling in een constante distributie.

De laatste bewering volgt onmiddellijk uit de voorgaande stelling. Want is

$$g_1' = f, \quad g_2' = f$$

dan is

$$\langle g_1', \varphi \rangle = \langle g_2', \varphi \rangle$$

voor iedere φ. Dus

$$\begin{aligned}\langle (g_1 - g_2)', \varphi\rangle &= -\langle g_1 - g_2, \varphi'\rangle = -\langle g_1, \varphi'\rangle + \langle g_2, \varphi'\rangle \\ &= \langle g_1', \varphi\rangle - \langle g_2', \varphi\rangle = 0,\end{aligned}$$

zodat $g_1 - g_2 = c$.

We mogen daarom zonder beperking van de algemeefiheid aannemen dat $\langle g, \xi\rangle = 0$, waarbij ξ weer de boven beschouwde toetsfunctie is. Blijkbaar wordt door

$$\langle g, \varphi\rangle = -\langle f, \varphi_1\rangle, \tag{9–17}$$

waarbij φ_1 de functie (9–14) is, een distributie gegeven. Het lineaire karakter en de continuïteit van het voorschrift zijn gemakkelijk te verifiëren. Vervangen we in (9–13) de functie φ door φ', dan komt er in het rechterlid

$$\varphi'(x) - \xi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(u)\, du = \varphi'(x)$$

en is dit blijkbaar gelijk aan

$$\varphi_0'(x) + \xi'(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du.$$

(9–14) wordt nu vervangen door

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{x} \varphi_0'(x)\, dx + \int_{-\infty}^{x} \xi'(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du \\ &= \varphi_0(x) + \xi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du = \varphi(x),\end{aligned}$$

wat ook wel zonder rekenen duidelijk is. Dus is

$$\langle g', \varphi\rangle = -\langle g, \varphi'\rangle = -\langle f, \varphi\rangle$$

waaruit blijkt dat de door (9–17) gedefinieerde functionaal inderdaad aan (9–16) voldoet.

Vervangen we in (9–13) φ door ξ dan komt er

$$\varphi_0(x) = \xi(x) - \xi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \xi(u)\, du = 0$$

en dus $\varphi_1 = 0$, zodat $\langle g, \xi\rangle = 0$ voor de door (9–16) geconstrueerde oplossing.

10. *Rekenregels voor de afgeleide.*

Vele van de elementaire regels der differentiaalrekening kunnen op distributies worden overgedragen. De *somregel* luidt

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'.} \tag{10–1}$$

Immers,

$$\langle (f+g)', \varphi \rangle = -\langle f+g, \varphi' \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle - \langle g, \varphi' \rangle$$
$$= \langle f', \varphi \rangle + \langle g', \varphi \rangle = \langle f' + g', \varphi \rangle.$$

De *produktregel* geldt in beperkte zin, omdat in het algemeen een produkt van distributies niet is gedefinieerd. Evenwel

Is $\alpha(x)$ een willekeurig vaak differentieerbare functie, dan is

(10–2) $$\boxed{(\alpha f)' = \alpha f' + \alpha' f.}$$

Rekening houdend met (6–6) hebben we

$$\langle (\alpha f)', \varphi \rangle = -\langle \alpha f, \varphi' \rangle = -\langle f, \alpha\varphi' \rangle = -\langle f, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi \rangle$$
$$= -\langle f, (\alpha\varphi)' \rangle + \langle f, \alpha'\varphi \rangle = \langle f', \alpha\varphi \rangle + \langle \alpha' f, \varphi \rangle$$
$$= \langle \alpha f', \varphi \rangle + \langle \alpha' f, \varphi \rangle = \langle \alpha f' + \alpha' f, \varphi \rangle.$$

Is α een constante c, dan is natuurlijk

$$(cf)' = cf'.$$

Zij $f(x)$ een gegeven distributie. Onder de *gespiegelde* van deze distributie verstaan we de distributie $f(-x)$ bepaald door

(10–3) $$\langle f(-x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle.$$

Er geldt

(10–4) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}f(-x)}{\mathrm{d}x} = -f'(-x).}$$

Immers,

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}f(-x)}{\mathrm{d}x}, \varphi(x) \right\rangle = -\langle f(-x), \varphi'(x) \rangle = -\langle f(x), \varphi'(-x) \rangle$$
$$= \left\langle f(x), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(-x) \right\rangle = -\langle f'(x), \varphi(-x) \rangle = -\langle f'(-x), \varphi(x) \rangle.$$

We passen dit toe op enkele eenvoudige voorbeelden.

Onder x_- verstaan we de gespiegelde van de distributie x_+. Uit (9–8) en (10–4) volgt

(10–5) $$\frac{\mathrm{d}x_-}{\mathrm{d}x} = -H(-x).$$

We definiëren nu

(10–6) $$|x| = x_+ + x_-,$$

(10–7) $$\operatorname{sign} x = H(x) - H(-x).$$

Blijkbaar is

(10–8) $$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dan blijkt uit de voorgaande resultaten

(10–9) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = \operatorname{sign} x.}$$

Voorts is

$$\frac{\mathrm{d}H(-x)}{\mathrm{d}x} = -\delta(-x) = -\delta(x),$$

want $\langle\delta, \varphi(-x)\rangle = \varphi(0) = \langle\delta, \varphi(x)\rangle$. Dus

(10–10) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\ \operatorname{sign} x}{\mathrm{d}x} = 2\delta.}$$

Tenslotte behandelen we nog enkele met de logaritme samenhangende distributies.

De functie $\log x_+$ gedefinieerd als

(10–11) $$\log x_+ = \begin{cases} \log x, & x > 0, \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases}$$

is, gelijk bekend, locaal integreerbaar. De singulariteit bij $x = 0$ geeft nl. geen moeilijkheden. De voortgebrachte distributie is bepaald door

(10–12) $$\langle \log x_+, \varphi\rangle = \int_0^\infty \log x\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

De afgeleide daarvan moeten we berekenen uit

$$-\langle \log x_+, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \log x\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Het ligt voor de hand om partiële integratie toe te passen. Zonder meer gaat dit niet, want dan ontstaat een divergente integraal. Schrijven we echter het laatste lid als

$$-\int_0^1 \log x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x - \int_1^\infty \log x\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x,$$

dan kunnen we dit omvormen tot

$$-(\varphi(x)-\varphi(0))\log x\Big|_0^1-\varphi(x)\log x\Big|_1^\infty$$
$$+\int_0^1\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

De beide eerste termen zijn gelijk aan nul, daar $\varphi(x)-\varphi(0)$ naar nul gaat als x en $x\log x\to 0$ voor $x\to 0$. De opgeschreven integralen zijn convergent en definiëren een distributie, die gelijk is aan x^{-1} voor $x>0$ (want voor de betreffende toetsfunctie is dan $\varphi(0)=0$) en gelijk aan nul voor $x<0$. We noemen deze distributie x_+^{-1}, zodat

$$\text{(10–13)}\qquad \langle x_+^{-1},\varphi\rangle=\int_0^1\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Deze distributie is niet regulier, want de integraal

$$\int_0^\infty\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

is bij $x=0$ divergent. Als resultaat hebben we

$$\text{(10–14)}\qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\log x_+}{\mathrm{d}x}=x_+^{-1}.}$$

Voor de gespiegelde functies hebben we dan

$$\text{(10–15)}\qquad \frac{\mathrm{d}\log x_-}{\mathrm{d}x}=-x_-^{-1}.$$

We voeren nu de volgende functies in

$$\text{(10–16)}\qquad \log|x|=\log x_+ +\log x_-,$$

$$\text{(10–17)}\qquad \log|x|\operatorname{sign}x=\log x_+ -\log x_-.$$

Voorts

$$\text{(10–18)}\qquad |x|^{-1}=x_+^{-1}+x_-^{-1}$$

en

$$\text{(10–19)}\qquad x^{-1}=x_+^{-1}-x_-^{-1}.$$

Men mag voor x^{-1} ook schrijven $|x|^{-1}\operatorname{sign}x$. Dan vinden we uit (10–14) en (10–15)

$$\text{(10–20)}\qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\log|x|}{\mathrm{d}x}=x^{-1}}$$

en

(10–21)
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\log|x|\operatorname{sign}x}{\mathrm{d}x} = |x|^{-1}.}$$

Let wel, dat de toepassing van de produktregel op (10–21) tot een zinloos resultaat voert.

We merken nog op, dat uit (10–19) en (10–13) volgt

(10–22)
$$\langle x^{-1}, \varphi\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

waarbij de integraal nog bij $x = 0$ convergeert.

Tot nu toe wijken de resultaten niet af van die welke men door differentiatie van gewone functies kan verwachten. Maar in dit geval bedriegt de schijn. We willen eens de afgeleide bepalen van x_+^{-1} bepalen. Daartoe berekenen we

$$-\langle x_+^{-1}, \varphi'\rangle = -\int_0^1 \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Om moeilijkheden bij partiële integratie te voorkomen schrijven we daarvoor

$$-\int_0^1 \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0))\,\mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\Bigg|_0^1 - \varphi'(0)\Bigg|_0^1 - \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\Bigg|_1^\infty +$$

$$-\int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

De integralen zijn convergent en met behulp daarvan definiëren we x_+^{-2} door middel van

$$\langle x_+^{-2}, \varphi\rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

De som van de termen, die door partiële integratie apart zijn komen te staan, is blijkbaar $\varphi'(0) = -\langle\delta', \varphi\rangle$, zodat we hebben

$$\langle (x_+^{-1})', \varphi\rangle = -\langle x_+^{-2}, \varphi\rangle - \langle\delta', \varphi\rangle$$

of

(10–23)
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_+^{-1}}{\mathrm{d}x} = -x_+^{-2} - \delta',}$$

een enigszins onverwacht resultaat.

Definiëren we echter

$$x^{-2} = x_+^{-2} + x_-^{-2}$$

en bedenken we dat

(10–24) $$\frac{dx_-^{-1}}{dx} = x_-^{-2} + \delta'(-x) = x_-^{-2} - \delta',$$

dan komt er blijkbaar

(10–25) $$\frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2},$$

zodat de distributie x^{-1} zich als de functie x^{-1} gedraagt.

We merken daarbij nog op, dat δ' een oneven distributie is, d.w.z. $\delta'(-x) = -\delta'(x)$.

Inderdaad

$$\langle \delta', \varphi(-x) \rangle = -\left\langle \delta, \frac{d}{dx}\varphi(-x) \right\rangle = \langle \delta, \varphi'(-x) \rangle$$
$$= \varphi'(0) = -\langle \delta', \varphi \rangle.$$

Ten slotte noemen we de stelling:

Differentiatie en overgang naar de zwakke limiet zijn verwisselbare processen.

Is

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda = f,$$

dan is ook

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} f'_\lambda = f'.$$

Het bewijs volgt direct uit

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\lim_{\lambda \to \lambda_0} \langle f_\lambda, \varphi' \rangle = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \langle f'_\lambda, \varphi \rangle.$$

(wordt vervolgd)

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LIX. *Een bundel kubische krommen.*

1. Bij een vraagstuk, dat hier verder niet ter zake doet, heeft Dr. L. Crijns (*Over een bundel kubische krommen,* Euclides **40**, VI, 1965, p. 173—174) een tweetal interessante met een driehoek verbonden vlakke krommen van de derde graad K_1 en K_2 ontmoet, die respectievelijk door de volgende vergelijkingen worden voorgesteld

$$K_1 \equiv \sum x_1^2(x_2 \cos \beta - x_3 \cos \gamma) = 0 \qquad (1)$$

$$K_2 \equiv \Sigma\, x_1^2(x_2 \cos \gamma \cos \alpha - x_3 \cos \alpha \cos \beta) = 0. \qquad (2)$$

Hierin zijn x_1, x_2 en x_3 homogene driehoekscoördinaten voor de driehoek ABC, die de hoeken α, β en γ heeft.

De schrijver bewijst dat K_1 en K_2, en dus ook alle exemplaren van de bundel die zij bepalen, door de volgende *negen* merkwaardige punten gaan: de hoekpunten A, B en C, de middelpunten I_0, I_1, I_2 en I_3 van de in- en aangeschreven cirkels, het hoogtepunt H en het middelpunt M van de omgeschreven cirkel. Voorts gaan de raaklijnen in A, B en C aan K_1 alle door H en die aan K_2 alle door M. Er wordt verder een weg aangeduid waarlangs men de vierde door H gaande raaklijn aan K_1 (resp. de vierde door M gaande raaklijn aan K_2) en daarmee de projectieve invarianten der krommen zou kunnen bepalen.

2. Wij voegen aan de door Crijns afgeleide eigenschappen nog enkele toe. In de *isogonale verwantschap* ten opzichte van de driehoek correspondeert met een door de hoekpunten gaande kubische kromme een eveneens door de hoekpunten gaande kubische kromme. Daar de vier punten I dekpunten zijn van deze verwantschap en verder H en M aan elkaar verwant zijn, is het duidelijk, dat met elk exemplaar van de bundel weer een exemplaar correspondeert. Is (x_1', x_2', x_3') het met (x_1, x_2, x_3) verwante punt, dan heeft men

$$x_1 = x_2' x_3',\ x_2 = x_3' x_1',\ x_3 = x_1' x_2' \qquad (3)$$

Substitueert men dit in (1) en (2), dan stelt men na deling door $x_1'x_2'x_3'$ vast, dat de vergelijkingen van K_1 en K_2 en ook die van elk exemplaar van de bundel, onveranderd zijn gebleven. Wij hebben dus: *de krommen* K_1 *en* K_2, *en ook elk exemplaar van hun bundel zijn invariant bij de isogonale transformatie ten opzichte van de driehoek.*

3. M is het punt $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$; de middellijn AM snijdt dus de overstaande zijde BC in $A_1 = (0, \cos\beta, \cos\gamma)$ en men ziet onmiddellijk, dat dit punt aan (1) voldoet. Hieruit volgt: *zijn* A_1, B_1 *en* C_1 *de snijpunten van* AM, BM *en* CM *met de overstaande zijden, dan gaat* K_1 *door* A_1, B_1 *en* C_1. H is het punt $(\cos\beta\cos\gamma, \cos\gamma\cos\alpha, \cos\alpha\cos\beta)$ dus het voetpunt A_2 van de hoogtelijn uit A is $(0, \cos\gamma, \cos\beta)$ en dit punt voldoet ten duidelijkste aan (2). Dus K_2 *gaat door de voetpunten van de hoogtelijnen van de driehoek.*

4. Is $P = (y_1, y_2, y_3)$ een punt van de kromme $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, dan is de raaklijn in P:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_1} (y_1, y_2, y_3)\, x_1 = 0$$

De raaklijn aan K_1 in een op K_1 gelegen punt $P(y_1, y_2, y_3)$ heeft dus de vergelijking

$$\Sigma \{2y_1 (y_2 \cos\beta - y_3 \cos\gamma) + (-y_2^2 + y_3^2)\cos\alpha\}\, x_1 = 0. \qquad (4)$$

Voor de raaklijn in M aan K_1 vinden wij dan

$$\sum \cos\alpha\, (\cos^2\beta - \cos^2\gamma) x_1 = 0. \qquad (5)$$

Maar aan deze vergelijking voldoet het punt H. De raaklijn aan K_1 in M gaat dus door H of wel: K_1 *raakt in* M *aan de rechte van Euler.* Op analoge wijze toont men aan: K_2 *raakt in* H *aan de rechte van Euler.*

5. Omdat de vierde raaklijn uit H aan K_1 bekend is geworden, kan nu ook de invariant dezer kromme op de door Crijns aangeduide wijze worden bepaald. Het is immers de dubbelverhouding van de rechten HA, HB, HC en HM (en deze is gelijk aan die van de vier raaklijnen aan K_1 uit een willekeurig punt van K_1). De snijpunten met $x_3 = 0$ zijn respectievelijk
$(1,0)$, $(0,1)$, $(\cos\beta, \cos\alpha)$ en $\{\cos\beta(\cos^2\alpha - \cos^2\gamma), \cos\alpha(\cos^2\beta - \cos^2\gamma)\}$

zodat de dubbelverhouding wordt

$$d = H(A, B, C, M) = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\gamma}{\cos^2\beta - \cos^2\gamma} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} \tag{6}$$

terwijl $H(B, C, A, M) = \dfrac{d-1}{d} = \dfrac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}$, etc.

De constante dubbelverhouding voor K_2 wordt blijkens (1) en (2) verkregen door in deze antwoorden $\cos\alpha$, $\cos\beta$ en $\cos\gamma$ door hun omgekeerden te vervangen.

6. Men heeft zich wel de vraag gesteld of een voetpuntsdriehoek $P_1P_2P_3$ van een punt P ten opzichte van driehoek ABC met deze driehoek Ceva-ligging kan vertonen, dus of AP_1, BP_2 en CP_3 door één punt S kunnen gaan. De meetkundige plaats der punten P met deze eigenschap vindt men wel aangeduid als de kromme van Darboux (of van Lucas) en die der punten S als de kromme van Lucas (of van Darboux).

Is $P = (x_1, x_2, x_3)$ dan vindt men gemakkelijk voor P_1: $(0, x_2 + x_1\cos\gamma, x_3 + x_1\cos\beta)$ en analoge uitdrukkingen voor P_2 en P_3. De voorwaarde dat AP_1, BP_2 en CP_3 door één punt gaan, luidt:

$$(x_2 + x_3\cos\alpha)(x_3 + x_1\cos\beta)(x_1 + x_2\cos\gamma) - (x_3 + x_2\cos\alpha)(x_1 + x_3\cos\beta)(x_2 + x_1\cos\gamma) = 0$$

of wel

$$\sum x_1^2\{x_2(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha) - x_3(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)\} = 0,$$

maar dat is niets anders dan $K_1 - K_2 = 0$. De kromme van Darboux is dus een exemplaar van eenvoudige vergelijking uit de door Crijns beschouwde bundel. Dat de negen punten aan de voorwaarde voldoen, is duidelijk. De kromme van Lucas, die eveneens van de derde graad is, behoort niet tot de bundel.

KORREL CXXVIII

(Wel poollijn en geen inzicht)

We maken voor het eerst kennis met het begrip meetkundige plaats in de vlakke meetkunde; daarna in de stereometrie en in de analytische meetkunde. We geven een paar simpele voorbeelden van dit laatste.

1. *Eis*: de punten P op gelijke afstanden van het punt O (0; 0) → de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$.

2. *Eis*: de punten P op gelijke afstand van $A(a; 0)$ en $B(b; 0)$ →de rechte lijn $x = \frac{1}{2}(a + b)$.

3. *Eis*: de punten P, die op tweemaal zo grote afstand liggen van $A(-a; 0)$ als van $B(a; 0)$ → de cirkel $(x + a)^2 + y^2 = 4\{(x - a)^2 + y^2\}$.

Met tientallen te vermeerderen; eerst wordt de eis gesteld, waaraan de punten moeten voldoen; daarna komt de vergelijking. We gaan verder:

4. *Eis*: . . . . . → $x_1 x + y_1 y = r^2$ heet de poollijn.

In de schoolboeken, aangeduid op blz. 141 en 142 van jg. **38** van „Euclides" onder 1, 2, 3, 4, 5 staat niets op de plaats van de stippen; enkel maar met enige omhaal wat achter de pijl staat!

Ik haal hier aan, wat men vindt in Euclides **30** in het rapport van de leerplancommissie, blz. 150; zie jg. **38**, blz. 141. Er wordt zeer terecht gezegd: *En om dat inzicht is het te doen. Voor automatische toepassing van niet begrepen rekenprocedé's is er op de school, die een algemene vorming nastreeft, geen plaats.* Maar

poollijn van $(x_1 ; y_1)$ t.o. van $x^2 + y^2 = r^2$ is $x_1x + y_1y = r^2$.
poollijn van $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ is

$$(x_1 - a)(x - a)^2 + (y_1 - b)(y - b)^2 = r^2$$

zonder enig begrip; het is fraai.

P. Wijdenes

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN H.B.S. 1964.

Wiskunde

h.b.s.-A. Noch het schriftelijk noch het mondeling geven aanleiding tot bijzondere opmerkingen. Het kwam vrijwel niet meer voor dat een kandidaat totaal niets aan het vak gedaan had.

Met alle begrip voor de moeilijkheden, die het gebrek aan tijd in de avondlycea met zich brengt, meent de sub-commissie toch te moeten aandringen op meer begrip dan het van buiten leren van formules, waarvan de bedoeling volkomen duister blijft, verwacht kan worden. Het nogal eens optredende gebrek aan simpele rekentechnische vaardigheid en nauwkeurigheid mag de kandidaten, die toch ook in hun handelsvakken veel moeten rekenen, als een ernstig tekort aangemerkt worden.

h.b.s.-B. Algebra. De opmerkingen van vorig jaar kunnen herhaald worden. Er moest worden geconstateerd dat vele kandidaten niet voldoende inzicht in de algebraïsche begrippen toonden. Dit gaf dikwijls aanleiding tot verwarringen b.v. van de begrippen functie, vergelijking en ongelijkheid, verder tot onjuiste formulering van de som van een oneindige reeks, van het differentiaalquotiënt en van de afgeleide functie.

Ook de technische vaardigheid van vele kandidaten was onvoldoende. Bij het oplossen van een ongelijkheid gingen velen op een al te mechanische wijze te werk.

Het viel ook dit jaar weer op dat vele kandidaten bij het vaststellen van de aard der uiterste waarde(n) van een functie weinig animo vertoonden de methode van het teken van de eerste afgeleide te kiezen. Deze methode verdient de voorkeur boven die van de tweede afgeleide.

Sommige kandidaten hadden moeite met het aantonen van de aanwezige symmetrie in de grafiek van bepaalde functies.

h.b.s.-B. Stereometrie. De resultaten van het schriftelijk examen waren teleurstellend, wat meestal het gevolg was van het niet kunnen tekenen van een goede stereometrische figuur. Blijkbaar was dit ook tot de kandidaten doorgedrongen, en hadden velen zich nog eens duchtig geprepareerd voor het mondeling examen, waar in menig geval een opvallend herstel optrad. Toch heeft het zin de wenken uit vorige verslagen nog eens te herhalen, met name wat betreft het nauwkeurig formuleren van begrippen en stellingen. Ook mag het niet voorkomen dat op het examen blijkt, dat men aan een belangrijk onderwerp als de bol, eenvoudig niet toegekomen is.

h.b.s.-B. Goniometrie. Het is de sub-commissie opgevallen dat weinig kandidaten in staat zijn goniometrische ongelijkheden vlot op te lossen. Ook het uitdrukken van een argument in radialen levert grote moeilijkheden op, terwijl het toch noodzakelijk is deze eenheden in te voeren ten einde een behoorlijke grafiek te kunnen tekenen, laat staan de vergelijking van een raaklijn te bepalen of een oppervlakte te berekenen.

h.b.s.-B. Analytische meetkunde

Het herhalen van tweedegraads vergelijkingen tot middelpuntsvergelijkingen wordt door de meeste kandidaten onvoldoende beheerst, om maar niet te spreken

over poollijnen t.o.v. dergelijke krommen. Ook het elimineren van parameters geschiedt vaak stuntelig; de oorzaak hiervan moet ons inziens gezocht worden in het feit, dat men niet met begrip te werk gaat en maar volgens bepaalde regeltjes werkt.

Tenslotte kostte het veel moeite om een juiste meetkundige definitie van een cirkelbundel te laten produceren; men kan geen genoegen nemen met de omschrijving: „Alle cirkels door twee punten".

BOEKBESPREKING

E. M. Hemmerling, *Fundamentals of College Geometry*, John Wiley and Sons Ltd., London 1964, 400 blz., prijs 53/—.

In dit boek vindt men de klassieke meetkunde met moderne notaties en begrippen behandeld. Schrijver begint met het begrip verzameling (a well-defined *collection* of objects) en voert dan de operaties „cup" en „cap" in. Met goed gekozen voorbeelden wordt de aandacht gevraagd voor de deductieve en inductieve redeneermethode. Na 11 axioma's uit de algebra volgen 12 postulaten voor de meetkunde, *„Common practice often makes no distinction between the „axioms" and „postulates". Either is used to denote an assumed property".*

In de daarna volgende bewijzen wordt van elke stap een verantwoording gevraagd. Wil men de aandacht blijven boeien, dan zal men toch wel spoedig dienen over te gaan tot het inlassen van „parate kennis".

Een behandeling van enkele begrippen uit de elementaire logica, uitgaande van het principe *„tertium non datur"* (o.a. conjunctie, disjunctie, negatie, implicatie, modus ponens en tollens) zal mogelijk de vraag uitlokken: „Gaat dat zo maar? Kan men hier ook geen axiomatische opzet eisen".

Wat de stereometrie betreft, enige haast is geboden want er is slechts één hoofdstuk aan gewijd. Van een enigszins strenge opbouw is nu niet veel meer over. Of een lijn ooit loodrecht op een vlak zal staan is krachtens de definitie, wegens tijdgebrek, onmogelijk vast te stellen.

Het boek besluit met de analytische meetkunde van het platte vlak. Uit bovenstaande samenvatting blijkt dat de eerste hoofdstukken een bestudering waard zijn.

Burgers

C. A. Hayes, *Concepts of Real Analysis*. John Wiley & Sons Ltd., Londen, 1964, 180 blz., prijs 49/—.

In dit boek vindt men praktisch dezelfde onderwerpen terug als in: Ribenboim, *Functions, Limits and Continuity*, al wijkt de behandeling wel enigszins af. Meer aandacht wordt n.l. besteed aan een fundering van de verzamelingsleer, ook wordt de kwestie rond het keuze-axioma besproken, waarbij het jongste resultaat van P. J. Cohen, dat dit axioma ook een echt axioma is, vermeld wordt.

De formuleringen en definities zijn met zorg gekozen, waarbij de rol die de intuïtie gespeeld heeft niet wordt vergeten. Speciale aandacht krijgt ook het definiëren van functies m.b.v. inductie.

Reeds direct worden stellingen uit de formele logica aangehaald om de bewijsvoering te verscherpen. Zo neemt de schrijver m.i. terecht geen genoegen met een bewijs als „De lege verzameling ϕ bevat geen enkel element, dus alle elementen van ϕ behoren tot elke verzameling, dus ϕ is deelverzameling van elke verzameling. De schrijver beroept zich hier op de stelling dat, $P \to Q$ in ieder geval een juiste implicatie is, als P onjuist is.

Zo krijgt men: $x \in \phi \rightarrow x \in A$. Het is alleen jammer dat evenzo:

$x \in \phi \rightarrow x \notin A$ een juiste implicatie is.

Het lijkt me beter, een deelverzameling van een verzameling a.v. te definiëren:

$$A \cup B = A \rightarrow B \subset A \text{ dan geldt:}$$
$$A \cup \phi = A \rightarrow \phi \subset A.$$

Een groot aantal vraagstukken met „hints and answers" helpen de studerende zich het geleerde eigen te maken.

Burgers

R. Ribenboim, *Functions, Limits and Continuity*, John Wiley and Sons, Inc., London 1964, 140 blz., Prijs 45/—.

De inhoud van dit boekje is duidelijk geformuleerd door de titel. Beginnend met de ontwikkeling van het getalbegrip, uitgaande van de gehele getallen, worden de rationale getallen gedefinieerd als klassen van equivalente geordende getallenparen, waarbij de equivalentie voldoet aan de bekende eisen (reflexief, symmetrisch en transitief).

In een opgave op blz. 10 wordt het duidelijk, dat men, uitgaande van de 5 axioma's van Peano, het fundament kan verplaatsen. De opmerking in de voetnoot: „Most likely, the completion of these theoretical exercises, and the similar sets that are to follow, will require a great deal of time and, possibly, some competent guidance" is dan ook zeker niet misplaatst.

Reële getallen zijn dan klassen van equivalente fundamentaalrijen van rationale getallen. (In appendix A wordt de snedentheorie van Dedekind besproken).

Dan volgen begrensde verzamelingen, verdichtingspunten, supremum en infimum, cauchy-rijen van reële getallen, limieten. Met goedgekozen voorbeelden, zonder „competent guidance" te verwerken. Functies zijn dan gedefinieerd als eenduidige afbeelding van een verzameling (x) op een verzameling (y). Het moet me van 't hart, dat een functie wel wat eenzijdig wordt bezien. Het zg. operatieve karakter wordt geheel verwaarloosd. De notatie: $y = f(x)$ kan volgens de definitie slechts betekenen, dat f een eenduidige afbeelding tot stand brengt tussen de elementen van (x) en (y). En deze afbeelding ontbreekt nu juist in de aangeboden figuur. Logisch lijkt me: $(x) \rightarrow (y)$.

(x) en (y) en $(x \times y)$ via $(x) \rightarrow (y)$ ontstaat dan een deelverzameling van $(x \times y)$. En het is deze deelverzameling van $(x \times y)$, die de leerling „als grafiek" herkent.

Voor de uniforme continuïteit is het overdekkingstheorema van Bolzano-Weierstrasz nodig.

Samengevat: een boek waarvan de bestudering zal bijdragen tot het doel: „to provide a well-grounded basis for the study of mathematical analysis".

Burgers

Mitrinovic, D. S., *Tutorial texts and problems collections in mathematics* (in collaboration with E. S. Barnes, C. D. B. Marsh and J. R. M. Radok) 1 *Elementary Inequalities*, ix + 150 pp. P. Noordhoff N.V., 1964, prijs *f* 20.75.

Deze verzameling van ongelijkheden, veelal met een of meer bewijzen, is overgenomen uit een in het Servisch uitgegeven collectie „Zbornik matematičkih problema", Vol. I, II en III.

Enige bekendheid met de differentiaal- en integraalrekening is nodig. Men vindt een schat van problemen, waarop men z'n kracht kan beproeven. Men kan het zelfs als een onmisbaar naslagwerk beschouwen. Om enig idee van de inhoud te geven, vermeld ik slechts dat men o.a. zal vinden de bekende ongelijkheden (en vele minder bekende) over gemiddelden, ongelijkheden van Bernoulli, Chebychev, Abel, Cauchy-Schwartz, Young, Jensen en vele anderen.

Burgers

Faddegon, Rommes, *Hogere Wiskunde*, J. B. Wolters Uitgeversmij N.V., Groningen, 1964, 220 blz. *f* 9.75.

Dit boek is geschreven voor hen die studeren voor de nijverheidsakten Nb, Nc, Nf, Nh, Ni, Nj, Nk, Nu, Nw, Nz, de theorieakten NIIa, NIII, NIV, NIVw, NIVz, NV, NX en NI en behandelt: complexe getallen, grafischev oorstellingen, het functiebegrip komt er karig af. „Een lineair verband tussen twee grootheden wordt grafisch door een rechte lijn voorgesteld, *d/*: de grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn. De verwarring: functie-vergelijking is blijkbaar onuitroeibaar, op blz. 54 staan alleen vergelijkingen.

Verder: limieten, differentiaal- en integraalrekening, eenvoudige differentiaalvergelijkingen en het binaire stelsel.

Het boek is op de praktijk afgestemd. De uitvoering is goed verzorgd.

Burgers

J. Drooyan and W. Hadel, *A programmed Introduction to Number Systems*, John Wiley and Sons, Inc., London 1964, 254 blz., Prijs 30/—.

Uit de titel kan men opmaken, dat dit boek bestaat uit een opeenvolging van korte mededelingen (definities, eenvoudige theorie, opgaven) in totaal 975, terwijl na elke definitie een vraagstelling volgt, waarbij men volstaan kan met het invullen van een of twee woorden. Men dient een blanco vel papier van boven naar beneden te schuiven, tot men bij de vraag gekomen, meent het antwoord te kunnen invullen. Heeft men dit gedaan, dan mag men weer een regel schuiven en ziet men het goede antwoord. Verder begrijpt men wel, dat men weer terug moet schuiven, als het antwoord fout was. Als voorbeeld neem ik R 167.

— The property that two equivalent sets have in common, when all other properties of both sets, except the fact of their equivalence, are disregarded, is called . . . . . number.

Behandeld worden: Verzamelingen en het begrip getal (kardinaalgetallen, ordinaalgetallen, natuurlijke getallen). Axioma's voor gelijkheid, voor ordening, het gesloten zijn van de optelling in de verzameling van de natuurlijke getallen, de commutatieve-associatieve wet en de substitutiewet. Waarna de vermenigvuldiging, Cartesiaanse produkten en een herhaling van de bovengenoemde wetten, maar nu voor de vermenigvuldiging, volgen. Daarna: de aftrekking en deling, die niet-gesloten blijken. Nu volgen de gehele getallen en tenslotte de rationale getallen.

De schrijvers taxeren, dat de behandeling 18 uur en 21 minuten vereist. Het boek is tevens bedoeld voor ouders die belang stellen in de nieuwe ideeën die hun kinderen worden bijgebracht in de wiskunde. Wel meen ik, dat dit boekje alleen zeer vruchtbaar kan zijn bij leerlingen, die zich geheel vrij kunnen maken van hun kennis op dit gebied opgedaan op de lagere school.

Burgers

John R. Dixon, *A Programmed Introduction to Probability*, John Wiley and Sons, Inc., New York—London—Sidney, 1964, aantal blz. alleen door berekening te vinden, dikte 21 mm, 30/—.

Inhoud: inleiding in de propositielogica, de hoofdregels van de kansrekening, permutaties en combinaties, binomiale verdeling, verwachte waarde en standaarddeviatie.

Methode: geen theorie, sommige hoofdstukken bestaan uit vragen waarop men een antwoord geeft en dit meteen controleert, in andere heeft men de keus tussen verschillende antwoorden en wordt men naar de vraag terugverwezen als men een verkeerd antwoord geeft.

Aan het boek is door de auteur zeer veel zorg en tijd besteed.

Merkwaardig is de geesteshouding, die uit dit boek spreekt en die vermoedelijk in nauw verband staat met de gevolgde methode. Deze is niet alleen: al doende leert men, maar sterker nog: al doende leert men begrijpen. Om duidelijk te maken, wat ik hiermee bedoel, wil ik in grote trekken nagaan, hoe de kansrekening ontwikkeld wordt. Van kans wordt geen definitie of explicatie gegeven. We leren alleen, dat $p(A/B)$ betekent: de kans, dat A optreedt bij gegeven B. Daarna wordt ons gevraagd: wat is de kans, dat een gebeurtenis zal plaatshebben, die onmogelijk is? En we moeten uit ons zelf bedenken, dat het antwoord 0 is. En als de gebeurtenis zeker zal plaatshebben? Antwoord: 1. Wat is de kans, dat we met een echte munt kruis gooien? Antwoord: $\frac{1}{2}$. En dat we na 10 keer kruis de elfde keer weer kruis gooien? Antwoord: $\frac{1}{2}$. De kans, dat een proef mislukt, is 0,80. Wat is de kans, dat de proef niet mislukt? Antwoord: 0,20. (Deze antwoorden zijn zonder commentaar) Een blauwe urn bevat zes rode en drie zwarte knikkers op zondagmorgen. Wat is de kans, dat je er een zwarte knikker de eerste keer uittrekt?

Na deze voorbereiding maken we kennis met „the principle of insufficient reason". Het volgende voorbeeld maakt duidelijk, wat hiermee bedoeld wordt. In een urn zijn onbekende aantallen blauwe, rode, witte en zwarte knikkers. Wat is de kans, dat men er een witte knikker uit trekt? Antwoord: $\frac{1}{4}$. De motivering komt ongeveer op het volgende neer: waarom zou de kans op het trekken van een witte knikker groter zijn dan die op het trekken van b.v. een blauwe? Of kleiner? We leren nu de kansregel: kans is aantal gunstige gedeeld door aantal mogelijke gevallen, kennen. En we zien, dat deze een direct uitvloeisel is van het principe van „insufficient reason". Het komt me voor, dat dit principe zijn naam met recht draagt.

Een volgend hoofdstuk is gewijd aan de produktregel. Ons wordt zonder meer meegedeeld, dat deze luidt: $p(AB/X) = p(A/BX)\,p(B/X)$. En nu ons dit meegedeeld is, kunnen we naar hartelust vraagstukken maken, d.w.z. vragen beantwoorden. De somregel komt er al niet beter af. We krijgen meegedeeld, dat $p(A + B/X) = p(A/X) + p(B/X) - p(AB/X)$. De theoretische fundering is thans iets solieder, want we lezen in een noot: het is mogelijk deze regel af te leiden uit de twee regels, die we al kennen (complement- en produktregel). Daarna komt het theorema van Bayes aan de beurt, dat hier als direct gevolg van de produktregel geformuleerd wordt.

Ziehier de volledige theoretische fundering van de kansrekening. De rest bestaat uit een groot aantal, inderdaad goed gekozen, vraagstukken. Over de wijze, waarop men bij het oplossen van deze vraagstukken geleid wordt, niets dan lof. Dit geschiedt op voortreffelijke wijze. Men krijgt eerst de kans er zelf uit te komen en als dat helemaal niet lukt nog eens een zeer duidelijke uiteenzetting, waarna men het wel moet begrijpen.

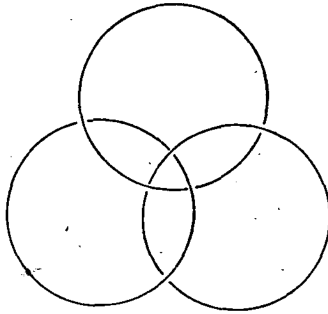
Door de gevolgde methode met de huidige te kruisen zou een zeer goed boek kunnen ontstaan. Waarschijnlijk heeft de auteur dit ook ingezien, want in zijn voorbericht zegt hij, dat gebruik van dit boek naast korte mondelinge uitleg voor hem de meest bevredigende methode was.

P. G. J. Vredenduin

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

134. Drie ringen zijn onderling verbonden, b.v. op de manier zoals in onderstaande figuur is aangegeven. In de zes punten, die in de figuur snijpunten van de cirkels zijn, kan de ene ring of de andere boven getekend worden. Dit geeft 64 verschillende



gevallen. In sommige van deze gevallen zal blijken, dat de drie ringen niet met zijn drieën aan elkaar vast zitten. Er wordt nu gevraagd in hoeveel verschillende (d.w.z. topologisch verschillende) gevallen de drie ringen wel verbonden zijn?

135. In een café in New York zitten aan een tafeltje A en B. Aan het tafeltje ernaast zitten C en D. A en B trachten het gesprek van C met D af te luisteren.
D zegt: er zijn hier hoge huisnummers in New York. Wat is b.v. jouw huisnummer?
C antwoordt: mijn huisnummer ligt tussen 13 en 1300.
D: Is je huisnummer een getal boven of onder de 500?
Het antwoord van C wordt door B wel, door A niet verstaan.
B (tegen A): Dat antwoord was een leugen.
D: Is je huisnummer een kwadraat?
Het antwoord van C wordt door B wel, door A niet verstaan.
B (tegen A): Dat antwoord was ook een leugen.
D: Is je huisnummer een derdemacht?
Het antwoord van C wordt door B wel, door A niet verstaan.
B (tegen A): Dat antwoord was juist.
D: Als je me nu nog zegt, of het tweede cijfer een 1 is, dan weet ik het.
Wat is nu volgens A het huisnummer?

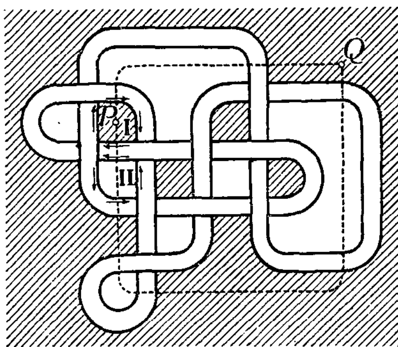
OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

132. Stelt men zich op in een punt P van gebied I, dan zal men rechtsom de rand doorlopende steeds langs omlaaggaande wegen gaan (van viaduct naar onder-

doorgang). In het naastgelegen gebied II zal men linksom langs omlaaggaande wegen gaan. Voorwaarde voor het gelukken van de gevraagde manier om de viaducten aan te brengen is dus, dat men er in slaagt de gebieden zo te arceren, dat van elk paar aangrenzende gebieden het een wel en het ander niet gearceerd wordt. (Het buitengebied moet daarbij meegerekend worden. In ons voorbeeld wordt het gearceerd.) Is dit steeds mogelijk?

Kies een punt Q, b.v. in het buitengebied. Verbind Q met P op zodanige wijze, dat de verbindingslijn niet door een snijpunt (viaduct) gaat. In de figuur is dit op twee manieren gedaan; de ene verbindingslijn levert 2 snijpunten met de weg, de andere 6. Omdat de totale weg gesloten is en de beide verbindingen van P en Q samen een jordankromme vormen, zal de gesloten weg deze in een even aantal punten snijden. Daaruit volgt, dat hoe de verbinding van P en Q gekozen wordt,



altijd het aantal snijpunten dezelfde pariteit heeft en in ons geval dus altijd even is. Het aantal snijpunten zal dan, zodra we P in een aan I grenzend gebied kiezen, oneven worden, enz. Arceren we nu de gebieden met even aantal snijpunten, dan ontstaat de vereiste arcering. En dus is het steeds mogelijk de viaducten op de gevraagde manier aan te leggen.

133. Nummer de zakken 1, 2, 3, 4, 5. Kies uit de met i genummerde zak a_i munten. Onderstel het gewicht van een munt in de met i genummerde zak is x_i gram. Weeg de gekozen munten, d.w.z. bepaal (in één weging)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5.$$

Hierin zijn dus de getallen a_i bekend, de getallen x_i onbekend. Er kunnen dus 3^5 uitkomsten uitkomen. De getallen a_i moeten dus zo gekozen worden, dat al deze 3^5 uitkomsten verschillend zijn. Stel $y_i = x_i - 10$. Kies $a_1 = 3^4$, $a_2 = 3^3$, $a_3 = 3^2$, $a_4 = 3^1$ en $a_5 = 3^0$. Dan zijn de mogelijke uitkomsten voor

$$y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3 + y_4a_4 + y_5a_5$$

de getallen 0 tot en met 242. Men ziet dat direct, als men deze getallen schrijft in het drietallig stelsel. De vijf cijfers van het getal zijn dan $y_1, \ldots, y_5$.

Rectificatie: In het artikel van P. Wijdenes: *De normaalvergelijking*, op blz. 241 (vorige nummer), moeten in regel 11 en 12, $a = 0$ en $b = 0$ vervangen worden door resp. $x = 0$ en $y = 0$.

beknopte analytische meetkunde

pn

door Dr. D. J. E. Schrek

In dit werk voor het vhmo wordt de meetkunde van het platte vlak behandeld.

Inhoud: Coördinaten - Vergelijkingen tussen coördinaten - De rechte lijn - Twee en meer rechte lijnen - De cirkel - Twee en meer cirkels - Meetkundige plaatsen - De kegelsneden in het algemeen - De parabool - De ellips - De hyperbool - Gemengde opgaven - Opgaven van het eindexamen der gymnasia en van het daarmee gelijkgestelde staatsexamen - Formules.

Bewerkt door Drs. H. Pleysier. 4e druk, 46 fig., ing. f 4.50; geb. f 5.25.

P. NOORDHOFF NV

pn

Voor gebruik aan gymnasium, h.b.s. (5-j. c.) lyceum en technische scholen

NOORDHOFF's SCHOOLTAFEL in 5 decimalen

I. De logaritmen van de getallen van 1 - 10000 II. Logaritmen sinustafel - III. Sinustafel - IV. Goniometrische verhoudingen van hoeken in radialen - V. Machten, Wortels, enz.

Zeer eenvoudige behandeling van de kleine hoeken. In tafel II. twee volle graden naast elkaar; in tafel III. vier volle graden naast elkaar.
Bewerkt door P. Wijdenes **20e druk/gek. f 3.10**
Voor gebruik aan gymnasium, h.b.s. (5-j. c.) en lyceum

NOORDHOFF's LOGARITMENTAFEL EN RENTETAFEL

De log. tafel in 4 decimalen; de rentetafels in 8 decimalen.

I. Gewone logaritmen - II. Logaritmen sinustafel - III. Machten, Wortels en Omgekeerden - IV. Sinustafel. De goniometrische verhoudingen van hoeken in radialen - V. De vijf rentetafels in 8 decimalen en de annuïteitentafel.

25e druk/gek. f 2.25

P. NOORDHOFF NV

A NEW mathematical work

ASYMPTOTIC DISTRIBUTION MODULO ONE

Edited by J. F. Koksma and L. Kuipers

This work contains the lectures given at the colloquium on Asymptotic Distributions Modulo one which was held in Breukelen (The Netherlands) from 1 - 11 August 1962, under the auspices of the Netherlands Universities Foundation for International Cooperation (N.U.F.F.I.C.), and with financial support of NATO.

1965 203 pp. cloth Dfl. 10.50/$ 2.90

P. NOORDHOFF LTD.

Een nieuw werkschrift in de natuurkunde-methode door Ir. H. M. Mulder e.i.

continu experiment

Werkschrift 7 - trillingen en geluid
32 blz., geïllustreerd, ing. f 1.50

In deze natuurkunde-methode zijn les en proef geheel in elkaar overgegaan. De leerlingen bouwen hun kennis op door een 'voortdurend onderzoek', waarbij beurtelings kwalitatieve en kwantitatieve metingen worden gedaan. Door het afwisselend luisteren en handelen wordt de concentratie geprikkeld, terwijl de handigheid vergroot wordt.

Werkschrift 1 - vaste stoffen, vloeistoffen
Werkschrift 2 - kracht, temperatuur
Werkschrift 3 - warmte, fasen
Werkschrift 4 - magnetisme, stromen
Werkschrift 5 - stromen, spanningen
Werkschrift 6 - licht
Prijs per deel, ing. f 1.35

P. NOORDHOFF NV

leerboek der natuurkunde

pn

Natuurkunde-methode voor het v.h.m.o.
door Dr. H. LINDEMAN en Drs. G. H. FREDERIK

Deel IA	235 blz.	8e druk	ing. f 7.50	Mechanica, Vloeistoffen, Gassen en Warmteleer
Deel IB	208 blz.	6e druk	ing. f 6.50	Geometrische optica en Elektriciteit
Deel IIA	235 blz.	6e druk	ing. f 7.50	Mechanica, Mechanische warmtetheorie
Deel IIB	146 blz.	6e druk	ing. f 5.90	Golven en Geluid, Fysische optica
Deel III	286 blz.	4e druk	ing. f 6.50	Elektriciteit, Atoom- en Kernfysica.

Alle delen zijn geïllustreerd, - achterin zijn Vraagstukken met de antwoorden opgenomen.

P. NOORDHOFF NV

Alle uitgaven ook verkrijgbaar via de boekhandel